U slučaju niskofrekventnih polja Maksvelove jednačine za materijalne sredine dobili smo usrednjavanjem Maksvelovih jednačina za pravo polje i to prvo po ansamblu identičnih sistema, tj. po svim mogućim mikrostanjima sredine, a potom po beskonačno malom elementu zapremine oko uočene tačke i po beskonačno malom intervalu vremena oko uočenog trenutka, pri čemu smo sva naelektrisanja mogli podeliti na slobodna i vezana. Međutim, ako imamo brzo promenljiva polja[1], na primer u plazmi ili u metalu, takav prelaz na makrofizičke jednačine nije moguć. Pri tome, elektromagnetno polje koje je brzo promenljivo u vremenu neminovno je brzo promenljivo i u prostoru. Stoga se kao polazna tačka moraju uzeti Maksvelove jednačine za mikrofizičko elektromagnetno polje, pri čemi ćemo sva naelektrisanja podeliti samo na unutrašnja i spoljašnja. U tom smislu se moraju formulisati i odgovarajuće materijalne jednačine kao dopunske relacije između odgovarajućih mikrofizičkih veličina, koje sadrže samo mikrofizičke jačine električnog i magnetnog polja.

[1] Elektromagnetno polje koje je brzo promenljivo u vremenu neminovno je brzo promenljivo i u prostoru.

1. Matematički podsetnik – Furierove (Fourier) transformacije

Svaka funkcija $f(t)$ koja je definisana na intervalu $\left(-T/2, T/2\right)$ i u njemu apsolutno integrabilna

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right| dt < \infty \tag{1}$$

može se prikazati Furierovim redom

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \right),$$

gde je $\omega_0 = 2\pi / T$, što se može napisati i u kompleksnom obliku

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i n \omega_0 t} . \tag{2}$$

Koeficijente c_n nalazimo množeći gornju jednačinu sa $e^{i m \omega_0 t}$ i integraleći obe strane od $-T/2$ do $T/2$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i m \omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i(m-n)\omega_0 t} dt$$

a na desnoj strani integral različit je od nule samo integral za $n = m$ i jednak je T, čime dobijamo

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i m \omega_0 t} dt . \tag{3}$$

Ako je pri tome funkcija $f(t)$ periodična, red (2) predstavlja ovu periodičnu funkciju u beskonačnom intervalu $\left(-\infty, \infty\right)$, <u>a ako je neperiodična</u>, samo u intervalu $\left(-T/2, T/2\right)$.

Uvodeći oznake

$$\omega_n = n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}, \quad \Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{4}$$

i označavajući integracionu promeljivu sa t', koeficijente c_n možemo prikazati kao

$$c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{i\omega_n t'} dt'$$

tako da red (2) dobija oblik

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t') e^{i\omega_n t'} dt' . \tag{5}$$

Pustimo sada da T teži beskonačnosti. Tada će skup diskretnih vrednosti ω_n, preći u skup svih vrednosti neprekidno promenljive ω, a suma u gornjem izrazu prelazi u odgovarajući integral

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t')e^{i\omega t'}dt'.$$

Na taj način svaku funkciju možemo razviti u Furierov red i u beskonačnom intervalu $(-\infty,\infty)$, ali u obliku sume po svim vrednostima neprkidno promenljive ω u obliku

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{6}$$

tzv. *Furierov integral*, gde smo sa $\phi(\omega)$ označili odgovarajuće koeficijente u ovom razvoju

$$\phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')e^{i\omega t'}dt'. \tag{7}$$

Ovim relacijama definisane su Furierove transformacije, pri čemu se funkcija $\phi(\omega)$ naziva *Furierov transform* funkcije $f(t)$ i često se označava sa $\mathsf{F}[f(t)]$, a funkcija $f(t)$ *inverzni Furierov transform* funkcije $\phi(\omega)$.

Između $\phi(\omega)$ i $f(t)$ postoji jedna važna relacija koja neposredno sledi iz definicija (6) i (7)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\omega)|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt. \tag{8}$$

To je tzv. *Parsevalova teorema*, koja uspostavlja vezu između Fourierovog i inverznog Fourierog transforma u integralnom obliku.

Za Furierov transform izvodne funkcije $df(t)/dt$ imaćemo posle parcijalne integracije,

$$\mathsf{F}[f'(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega t}dt$$

odnosno, prema (7)

$$\mathsf{F}[f'(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}i\omega\mathsf{F}[f(t)]. \tag{9}$$

Ako je funkcija $f(t)$ jednaka za $x=\pm\infty$, što je u praksi čest slučaj, integrisani deo otpada, pa dobijamo

$$\mathsf{F}[f'(t)]=-i\omega\,\mathsf{F}[f(t)] \tag{10}$$

čime se Furierov transform izvoda neke funkcije svodi na transform same te funkcije. Zahvaljujući ovoj osobini, primenom Furierovih transformacija na diferencijalne jednačine sa jednom ili više nezavisno promenljivih one se mogu svesti na jednostavnije, čak algebarske jednačine.

Na osnovu ovog rezultata može se naći i Furierov transform neodređenog integrala neke funkcije

$$F(t) = \int_a^t f(t)dt, \qquad F'(t) = f(t)$$

Naime, ako je opet $f(\pm\infty) = 0$ prema (10) biće

$$\mathsf{F}[f(t)] = \mathsf{F}[F'(t)] = -i\omega\,\mathsf{F}[F(t)],$$

odakle neposredno proizilazi

$$\mathsf{F}[F(t)] = \mathsf{F}\left[\int_a^t f(t)dt\right] = \frac{i}{\omega}\,\mathsf{F}[f(t)]. \tag{11}$$

2. Osnovne karakteristike brzo promenljivih polja

Podsetnik: u uobičajenom slučaju Maksvelove jednačine za materijalne sredine smo dobili usrednjavanjem Maksvelovih jednačina za *pravo polje* i to prvo po ansamblu identičnih sistema, tj. po svim mogućim mikrostanjima sistema, a potom po beskonačno malom elementu zapremine oko uočene tačke i po beskonačno malom intervalu vremena oko uočenog trenutka, pri čemu smo sva naelektrisanja mogli podeliti na *slobodna i vezana.*

Međutim, ako imamo brzo promenljiva polja, na. primer u plazmi, odnosi postaju znatno složeniji i takav prelaz na makroifzičke jednačine ne može se više izvesti.

Pri tome elektromagnetno polje koje je brzo promenljivo u vremenu neminovno je brzo promenljivo i u prostoru. Naime, pri frekvenciji ω prostorna periodičnost određena je talasnom dužinom, čiji je red veličine $\lambda \sim c/\omega$. Ako se povećava frekvencija ω, talasne dužine λ postaju sve manje i manje i najzad uporedljive sa atomskim razmerama u posmatranoj sredini. Pri takvim uslovima gubi smisao makrofizičko opisivanje elektromagnetnog polja.

Prema tome, visokofrekventne pojave se karakterišu *periodima istog reda veličine ili čak znatno manjim od karakterističnih vremena sredine* (kao što su vreme relaksacije, period sopstvenih oscilacija sredine), kao i *talasnim dužinama uporedljivim ili takođe čak znatno manjim od njenih karakterističnih dužina* (kao na primer srednje rastojanje između atoma, srednja slobodna putanja itd.). Stoga se ovde ne mogu više dobro definisati pojmovi fizički beskonačno mali element zapremine kao i fizički beskonačno mali interval vremena, te *nije više moguće ni usrednjavanje po prostoru i vremenu.* Sem toga, u brzo promenljivim poljima sva naelektrisanja ponašaju se uglavnom na isti način, naime samo osciluju oko svojih ravnotežnih položaja, te *ni podela naelektrisanja na slobodna i vezana nije više moguća.*

Usled svega toga prelaz sa mikrofizičkih na makrofizičke jednačine elektrodinamike putem usrednjavanja po fizički beskonačno malom elementu zapremine i po fizički beskonačno malom intervalu vremena ovde više nije moguć.

Stoga se *kao polazna tačka moraju uzeti Maksvelove jednačine za mikrofizička elektromagnetna polja,* dobijene usrednjavanjem samo po ansamblu identičnih sistema, pri čemu ćemo *sva naelektrisanja podeliti samo na spoljašnja i unutrašnja.* U tom smislu moraju se formulisati i odgovarajuće materijalne jednačine kao *dopunske relacije između odgovarajućih mikrofizičkih veličina,* koje sadrže samo mikrofizičke jačine električnog i magnetnog polja.

3. Maksvelove i materijalne jednačine za brzo promenljiva polja

Za brzo promeljiva elektromagnetna polja važe samo Maksvelove jednačine za mikrofizička polja, u kojima mikrofizičke prostorne i strujne gustine možemo razložiti na odgovarajuće članove usled spoljnih i unutrašnjih naelektrisanja, ove poslednje označimo gornjim indeksom m. Na taj način ove jednačine dobijaju oblik

$$
\begin{aligned}
&div\mathbf{E}^m = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_0 + \rho^m),\ div\mathbf{B}^m = 0,\\
&rot\mathbf{E}^m = -\frac{\partial \mathbf{B}^m}{\partial t}, \qquad rot\mathbf{B}^m = \mu_0\left(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}^m\right) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}^m}{\partial t},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

gde su ρ_0 i $\mathbf{j}_0$ prostorne i strujne gustine spoljnih naelektrisanja, a ρ^m i $\mathbf{j}^m$ odgovarajuće mikrofizičke gustine indukovanih naelektrisanja i struja. Pri tome za indukovana naelektrisanja važi zakon održanja naelektrisanja, odnosno jednačina kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + div\,\mathbf{j}^m = 0\,. \tag{12}$$

Ako pretpostavimo da se *u prvoj aproksimaciji* ipak može govoriti o usrednjavanju po fizički beskonačno malom elementu zapremine i beskonačno malom intervalu vremena, kao i o podeli svih naelektrisanja na slobodna i vezana, polazeći od jednačina (11) možemo dobiti uobičajeni oblik Maksvelovih jednačina:

$$
\begin{aligned}
&div\mathbf{D} = \rho_0, \qquad div\mathbf{B} = 0,\\
&rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

gde je $\mathbf{j}_c$ gustina kondukcione struje, a veličine $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ su definisane na uobičajeni način

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}\,. \tag{14}$$

Međutim, pravi smisao ovako uvedenih veličina kao i samih jednačina u gornjem obliku dobija se tek kada se ustanovi oblik odgovarajućih dopunskih, materijalnih jednačina, koje treba da uspostave vezu između veličina $\mathbf{D},\mathbf{H}$ i $\mathbf{j}_c$ s jedne strane i jačina polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ s druge strane.

U ovom slučaju zbog brzo promenljivih polja, vrednost vektora $\mathbf{D}$ u nekoj tački M u izvesnom trenutku t zavisiće ne samo od vrednosti makrofizičke jačine električnog polja $\mathbf{E}$ u toj tački i u tom trenutku, već i od njenih vrednosti *u svim ostalim tačkama polja* kao i *u svim ranijim trenutcima*. Iskustvo pokazuje da za *homogene i anizotropne sredine u stacionarnom stanju* pri relativno slabim poljima materijalne jednačine su oblika:

$$D_i(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)E_j\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt'\,. \tag{15}$$

Ovde izraz pod znakom integrala predstavlja doprinos komponente električnog polja E_j u elementu zapremine dV' u ranijem intervalu vremena dt' vrednosti komponente D_i vektora $\mathbf{D}$ u tački $M(\mathbf{r})$ u trenutku t, a jezgro $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')$ izražava jačinu uticaja ovog doprinosa. Na sličan način, između veličina $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$, kao i između $\mathbf{j}_c$ i $\mathbf{E}$ van oblasti stranog polja pod istim uslovima postoje veze analognog integralnog oblika

$$B_i(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j\mu_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)H_j\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt' \tag{16}$$

$$j_{ci}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j\sigma_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)E_j\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt'\,. \tag{17}$$

Ovako uvedene veličine $\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)$, $\mu_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)$ i $\sigma_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)$ odgovaraju *tenzorima dielektrične konstante, magnetne permeabilnosti i specifične provodljivosti* u ovom slučaju. Pri tome ove relacije *važe samo za relativno slaba polja* i one su karakteristične za tzv. linearnu elektrodinamiku.

Međutim, pošto ovo usrednjavanje kod brzo promenljivih polja ovde realno nema smisla, korektnije je dosledno primenjivati samo Maksvelove jednačine za mikrofizička polja i postupiti na sledeći način. Pošto za ovakva polja podela svih struja na struje pomeranja u vakuumu i indukovane struje zbog nemogućnosti razlikovanja slobodnih od vezanih naelektrisanja ovde više nije moguća, umesto veličine $\mathbf{D}$ često se uvodi veličina

$$\mathbf{D}'(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\mathbf{E}^m(\mathbf{r},t)+\int_{-\infty}^{t}\mathbf{j}^m(\mathbf{r},t')\,dt'\,, \tag{18}$$

koju ćemo takođe zvati *vektor indukcije.* Pri tome drugi član figuriše umesto jačine polarizacije i izražava sumu doprinosa odgovarajućih gustina indukovane struje u celokupnom ranijem vremenskom intervalu. Odavde sledi, na osnovu pravila diferenciranja integrala po gornjoj granici

$$\frac{\partial\mathbf{D}'(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}^m(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{j}^m(\mathbf{r},t)\,. \tag{19}$$

Imajući u vidu obrazac $\mathbf{j}_{pom}=\partial\mathbf{D}/\partial t$ koji određuje pomerajnu struju, vidimo da *izraz* $\partial\mathbf{D}'/\partial t$ *objedinjuje gustinu čiste pomerajne struje u vakuumu* $\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ *i gustinu celokupne indukovane struje* $\mathbf{j}^m$, u čemu je i smisao ovako uvdedne veličine $\mathbf{D}'$.

Odgovarajuće Maksvelove jednačine možemo dobiti polazeći od Maksvelovih jednačina (11) za mikrofizička polja. Prema definiciji veličine $\mathbf{D}'$ imamo

$$div\mathbf{D}'(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 div\mathbf{E}^m(\mathbf{r},t) + div\int_{-\infty}^{t}\mathbf{j}^m(\mathbf{r},t')\,dt', \tag{20}$$

a poslednji član, posle izmene redosleda operacija i na osnovu jednačine kontinuiteta može se izraziti pomoću prostorne gustine indukovanih naelektrisanja

$$div\int_{-\infty}^{t}\mathbf{j}^m(\mathbf{r},t')dt' = \int_{-\infty}^{t} div\,\mathbf{j}^m(\mathbf{r},t')\,dt' = -\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\rho^m(\mathbf{r},t')}{\partial t'}dt' = -\rho^m(\mathbf{r},t) + \rho^m(\mathbf{r},-\infty)$$

pa ako se još uvede tzv. *adijabatska hipoteza*, prema kojoj je $\rho(\mathbf{r},-\infty)=0$, biće

$$div\,\mathbf{D}'(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 div\,\mathbf{E}^m(\mathbf{r},t) - \rho^m(\mathbf{r},t)\,. \tag{21}$$

Tada Maksvelove jednačine (11) , napisane u obliku

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0 div\mathbf{E}^m - \rho^m = \rho_0, \qquad && div\mathbf{B}^m = 0, \\ &rot\mathbf{E}^m = -\frac{\partial\mathbf{B}^m}{\partial t}, && rot\mathbf{B}^m = \mu_0\left(\mathbf{j}^m + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}^m}{\partial t}\right) + \mu_0\mathbf{j}_0, \end{aligned} \tag{22}$$

na osnovu dobijenih relacija neposredno prelaze u

$$\begin{aligned} &div\,\mathbf{D}' = \rho_0, \qquad && div\mathbf{B}^m = 0, \\ &rot\mathbf{E}^m = -\frac{\partial\mathbf{B}^m}{\partial t}, && rot\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^m\right) = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial\mathbf{D}'}{\partial t}. \end{aligned} \tag{23}$$

To su *Maksvelove jednačine za brzo promenljiva polja*, a osnovne razlike između ovih jednačina i Maksvelovih jednačina u obliku (13) su sledeće:

1) U Maksvelovim jednačinama (13) operiše se sa srednjim vrednostima mikrofizičkih veličina, koje odgovaraju makrofizičkom polju, a u jednačinama (23) neposredno sa mikrofizičkim veličinama koje karakterišu realno mikrofizičko polje.

2) Dalja razlika je u tome što u jednačinama (13) imamo dva pomoćna vektora $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ i još vektor $\mathbf{j}_c$, a u jednačinama (23) samo jedan pomoćni vektor $\mathbf{D}'$, koji uključuje i gustinu indukovane struje $\mathbf{j}^m$. Kao posledica toga, Maksvelove jednačine (13) zahtevaju tri materijalne jednačine, a Maksvelove jednačine u obliku (23) samo jednu materijalnu jednačinu, jer uključenjem veličine $\mathbf{j}^m$ u vektor $\mathbf{D}'$ otpala je i potreba za uvođenjem veličine $\mathbf{H}$.

Ova jedina nezavisna materijalna jednačina treba da poveže vektor $\mathbf{D}'$, koji ovde takođe ima karakter mikrofizičke veličine, sa jačinom mikrofizičkog električnog polja $\mathbf{E}^m$. Iz istog razloga kao i malopre, naime zbog brzo promenljivog polja, vrednost vektora $\mathbf{D}'$ u nekoj tački M u trenutku t zavisiće ne smao od vrednosti jačine polja $\mathbf{E}^m$ u toj tački i u tom trenutku, već i od njenih vrednosti *u svim ostalim tačkama polja* kao i u *svim ranijim trenutcima*. U opštem slučaju anizotropnih sredina, po analogiji sa ranije navedenom integralnom relacijom (15) možemo formulisati ove relacije u obliku

$$D'_i(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j \varepsilon'_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)E_j^m\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt' \tag{24}$$

gde skup veličina ε'_{ij} takođe ima tenzorski karakter i zvaćemo ga *generalisani tenzor dielektrične konstante*. Za opisivanje karakteristika sredine dovoljna je samo jedna materijalna jednačina sa jednim nezavisnim tenzorom ε'_{ij} .

Na sličan način, između gustine indukovane struje $\mathbf{j}^m$ i jačine mikrofizičkog električnog polja $\mathbf{E}^m$ van oblasti stranog polja postojaće integralna relacija oblika

$$j_i^m(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j \sigma_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)E_j^m\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt' \tag{25}$$

Ova relacija odgovara drugoj materijalnoj jednačini za anizotropne sredine, a skup veličina σ_{ij} takođe ima tenzorski karakter i naziva se *generalisani tenzor provodljivosti*.

Međutim, ovaj tenzor nije nezavistan od tenzora ε'_{ij} zbog same definicije vektora $\mathbf{D}'_i$ (jednačina 18), koja uključuje i vektor $\mathbf{j}^m$. Naime, ako formiramo komponente ovog vektora

$$D'_i(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0 E_i^m(\mathbf{r},t)+\int_{-\infty}^{t} j_i^m(\mathbf{r},t')\,dt'$$

i prvi član s desne strane na osnovu osnovne osobine Dirkaove delta funkcije $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$, napišemo u obliku

$$\varepsilon_0 E_i^m(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_V E_i^m(\mathbf{r}',t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')dV'dt' =$$

$$=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j \delta_{ij}E_j^m(\mathbf{r}',t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')dV'dt'$$

a u preostala dva člana umesto D'_i i j_i^m stavimo izraze (24) i (25), dobićemo

$$\int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')E_j^m(\mathbf{r}',t')\,dV'dt' = \int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j [\varepsilon_0\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')+\sigma_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')]E_i^m(\mathbf{r}',t')dV'dt'$$

Pošto ova dva integrala moraju međusobno biti jednaka za bilo koju oblast integracije, odavde proizilazi

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=\varepsilon_0\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')+\sigma_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,. \tag{26}$$

čime je uspostavljena veza između tenzora ε'_{ij} i σ_{ij}. Odavde se vidi da za opisivanje karakteristika sredine u ovom slučaju dovoljna smo jedna materijalna jednačina sa jednim nezavisnim tenzorom ε'_{ij}.

4. Primena Furijerovg metoda

Pretpostavimo da se rešenja Maksvelovih jednačina mogu naći u obliku Furierovog reda razvijenog po funkcijama $e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ za sve vrednosti ω, k_x, k_y i k_z tj. u vidu odgovarajućeg Furierovog integrala. Na primer, uzmimo za $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}d^3\mathbf{k}\,d\omega \tag{27}$$

gde je $d^3\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$, a na sličan način i za $\mathbf{B},\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ odnosno $\mathbf{D}'$.To fizički znači da se posmatrano elektromagnetno polje može prikazati kao superpozicija ravnih monohromatskih talasa svih vrednosti frekvencije ω i komponenata talasnog vektora $\mathbf{k}$ (na primer, sunčeva svetlost može se razložiti po svim talasnim dužinama odnosno frekvencijama, tj. prikazati kao superpozicija odgovarajućih ravnih svetlosnih talasa).

Izraz (27) se može shvatiti kao generalizacija Furierovog integrala na četiri nezavisno promenljive, a amplitude $\tilde{\mathbf{E}}$ kao odgovarajući Furierovi transformi, koji su određeni generalizacijom integrala (7)

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{E}(\mathbf{r},t)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}d^3\mathbf{r}dt \tag{28}$$

gde smo po analogiji sa $d^2\mathbf{k}$ ovde element zapremine označili sa $d^3\mathbf{r} = dxdydz$.

Ako uzmemo Maksvelove jednačine za mikrofizička polja u obliku (23), između $\mathbf{D}'$ i $\mathbf{E}^m$ postoji veza integralnog oblika (24). Pri tome možemo pretpostaviti da uticaj električnog polja na jačinu polarizacije kao i na vrednosti vektora $\mathbf{D}'$ počinje tek od izvesnog dovoljno dalekog trenutka u prošlosti, koji možemo uzeti za trenutak $t = 0$. To je ekvivalentno pretpostavci da pre tog trenutka nije ni bilo elektromagnetnog polja, tj. da je

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r},t) = 0\ ,\ \mathbf{D}'(\mathbf{r},t) = 0 \quad \text{za } t < 0 \tag{29}$$

Tada u svim integralima po vremenu u kojima pod zankom integrala figurišu veličine električnog ili magentnog polja ova integracija efektivno počinje od trenutka $t = 0$, pa su integral (28) kao i sličan integral za $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega)$, koji predstavljaju Furierove transforme funkcija $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, oblika

$$\mathsf{F}[\mathbf{A}(\mathbf{r},t)] \equiv \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int \mathbf{A}(\mathbf{r},t)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}d^3\mathbf{r}dt \,. \tag{30}$$

Ako formiramo Furierov transform izvoda funkcije $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ po vremenu, dobićemo

$$\mathsf{F}[\partial\mathbf{A}/\partial t] \equiv \frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} = -i\omega\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t=0) \tag{31}$$

gde je $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},t=0)$ Furierov transform funkcije $\mathbf{F}(\mathbf{r},0)$ samo u odnosu na prostorne koordinate u početnom trenutku $t=0$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\mathrm{t}=0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathbf{A}(\mathbf{r},0)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{r} \,. \tag{32}$$

Na sličan način za Furierov transform izvoda funkcije $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ po koordinati x nalazimo, pod uslovom da je vrednost ove funkcije u bsekonačnosti jednaka nuli

$$\mathsf{F}[\partial\mathbf{A}/\partial x] \equiv \frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial x} = -ik_x\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) \tag{33}$$

odakle proizilazi, na osnovu analitičkog izraza za divergenciju i rotor

$$\begin{aligned}\mathsf{F}[div\mathbf{A}] &= i\mathbf{k}\cdot\tilde{A}(k,\omega)\\ \mathsf{F}[rot\mathbf{A}] &= i\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega)\end{aligned} \tag{34}$$

Ako sada Furierov metod primenimo na Maksvelove jednačine (23) tako što formiramo Furierove transforme obeju strana svake od ovih Maksvelovih jednačina

$$\begin{aligned}&\mathsf{F}[div\mathbf{D}'] = \mathsf{F}[\rho_0], && \mathsf{F}[div\mathbf{B}^m] = 0,\\ &\mathsf{F}[rot\mathbf{E}^m] = -\mathsf{F}[\partial\mathbf{B}^m/\partial\,\mathrm{t}], && \mathsf{F}[rot\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^m] = \mathsf{F}[\mathbf{j}_0] + \mathsf{F}[\partial\mathbf{D}'/\partial t]\end{aligned}$$

dobićemo

$$\begin{aligned}&i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{D}}'(\mathbf{k},\omega) = \tilde{\rho}_0(\mathbf{k},\omega),\\ &i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{B}}^m(\mathbf{k},\omega) = 0,\\ &i\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}^m(\mathbf{k},\omega) = i\omega\tilde{\mathbf{B}}^m(\mathbf{k},\omega) + \tilde{\mathbf{B}}^m(\mathbf{k},t=0),\\ &\frac{1}{\mu_0}i\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{B}}^m(\mathbf{k},\omega) = \tilde{\mathbf{j}}_0(\mathbf{k},\omega) - i\omega\tilde{\mathbf{D}}'(\mathbf{k},\omega) - \tilde{\mathbf{D}}'(\mathbf{k},t=0)\end{aligned} \tag{35}$$

Time je sistem paricijalnih diferencijalnih Maksvelovih jednačina (23) sveden na odgovarajući sistem algebarskih jednačina sa nepoznatim veličinama $\tilde{\mathbf{E}}^m, \tilde{\mathbf{B}}^m$ i $\tilde{\mathbf{D}}'$.

Primenimo sad Furierove transforme na odgovarajuće materijalne jednačine između $\mathbf{D}'$ i $\mathbf{E}^m$ (jednačina 24)

$$D'_i(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{t}\int_V\sum_j \varepsilon'_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)E_j^m\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt'$$

$$\mathsf{F}[\mathbf{D}'(\mathbf{r},t)] = \sum_j \mathsf{F}\left[\int_{-\infty}^{t}\int_V \varepsilon'_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)E_j^m\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt'\right]$$

Izraz u zagradi na desnoj strani predstavlja uopštenu konvoluciju funkcija $\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{E}^m(\mathbf{r},t)$.

Prema teoremi konvolucije koja važi za Furerove transforme , imamo

$$\mathsf{F}\left[\int_{-\infty}^{t}\int_V \varepsilon'_{ij}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)E_j^m\left(\mathbf{r}',t'\right)dV'dt'\right] = \left(2\pi\right)^2 \mathsf{F}[\varepsilon_{ij}\, E_j^m] = \left(2\pi\right)^2 \mathsf{F}[\overline{\varepsilon}_{ij}]\cdot \mathsf{F}[E_j^m]$$

što konačno daje

$$\tilde{D}_i(\mathbf{k},\omega) = \sum_j \tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{k},\omega)\tilde{E}_j^m(\mathbf{k},\omega) \tag{36}$$

gde je

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \int_0^{\infty}\int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}d^3\mathbf{r}dt\ . \tag{37}$$

Tim postupkom smo umesto komplikovane integralne jednačine (24) između veličina $\mathbf{D}'$ i $\mathbf{E}^m$ dobili jednostavne algebarske relacije između njihovih Furerovih transforma. Ako rešimo algebarske jednačine (35) i (36) po ovim Furierovim transformima $\tilde{E}_i^m, \tilde{B}_i^m$ i $\tilde{D}'_i$, nepoznate funkcije $E_i^m(\mathbf{r},t), B_i^m(\mathbf{r},t)$ i $D'_i(\mathbf{r},t)$ dobićemo pomoću obrazca (28) i sličnih za $\mathbf{B}$ i $\mathbf{D}'$. Međutim, izračunavanje ovih integrala često predstavlja veoma težak matematički problem, ali to i nije uvek neophodno. Naime, često se neposredno iz navedenih jednačina za Furierove transforme mogi izvući izvesni zaključci, na pr. veza između $\mathbf{k}$ i ω pri prostiranju elektromagnetnih talasa (tzv. disperziona jednačina), dovoljni za analizu posmatranog problema.